

Interpolation mit periodischen Spline-Funktionen I

GERHARD MERZ

Gesamthochschule Kassel, D-3500 Kassel, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received December 30, 1978

1.

Es bezeichne λ eine fest vorgegebene reelle Zahl mit $0 \leq \lambda < 1$. Ferner sei C_N der lineare Raum der auf der reellen Achse stetigen Funktionen mit der Periode $N \in \mathbb{N}$. Wir behandeln das folgende Interpolationsproblem: Zu beliebigem $f \in C_N$ ist eine N -periodische Spline-Funktion $s(x)$ vom Grad $m \geq 1$ gesucht, deren Knoten in den ganzen Zahlen liegen und die den Interpolationsbedingungen

$$s(\nu - \lambda) = f(\nu - \lambda) =: y_\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

genügt. In dieser Allgemeinheit wurde das Problem erstmals von ter Morsche [3] gestellt und durch einen weitreichenden Existenzsatz (Theorem 4.1) geklärt. Wir stellen hier den konstruktiven Aspekt des Problems etwas mehr in den Vordergrund und verallgemeinern zunächst das in [1] für $\lambda = 0$ angegebene Verfahren auf den vorliegenden Fall beliebiger äquidistanter Lage der Interpolationspunkte zwischen den Knoten des Splines.

Bezeichnet man die Menge aller vermöge (1) für $f \in C_N$ entstehenden Spline-Funktionen mit $S_{N,\lambda}^m$, so kann die Frage nach der Norm des durch $\mathcal{L}_{N,\lambda}^m(f): C_N \rightarrow S_{N,\lambda}^m$ definierten linearen Operators gestellt werden. Wir behandeln diese für die Beurteilung der numerischen Eigenschaften des Interpolationsprozesses grundlegend wichtige Aufgabe hier für die L_1 -Norm und geben eine Darstellung von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_1$ durch ein komplexes Linienintegral (vgl. [1, 2]). Eine detaillierte Untersuchung der Abhängigkeit von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_1$ von N und λ im Fall quadratischer Splines ($m = 2$) beschließt die Arbeit.

Meinem Freund und Kollegen Prof. Dr. Wilhelm Sippel danke ich sehr herzlich für seine Hilfe bei der Durchführung einer Reihe von numerischen Rechnungen, ohne die diese Arbeit in der vorliegenden Form nicht hätte entstehen können.

2.

Wir bezeichnen die Restriktion von $s(x)$ auf das Intervall $[v-1, v]$ mit $p_v(x) \in \overline{P}_m$. Setzt man

$$q_v(t) := p_v(t + v - 1), \quad t \in [0, 1],$$

sowie

$$q(t) := \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix},$$

$$T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(T ist eine (N, N) -Permutationsmatrix), so ergibt sich (vgl. [1] für den Fall $\lambda = 0$) $q(t)$ als Lösungsvektor des Systems von Differenzgleichungen

$$q(t) = Tq(1 + t) + \frac{1 - Tq(2 - \lambda)}{(1 - \lambda)^m} t^m. \quad (2)$$

Mit

$$W := \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \cdots & \zeta^{N-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \cdots & \zeta^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{N-1} & \zeta^{2(N-1)} & \cdots & \zeta^{(N-1)^2} \end{pmatrix}, \quad \zeta = e^{2\pi i/N},$$

$$H_m(t, z) := (1 - z)^{m-1} \sum_{i=0}^j z^i (t + v)^m, \quad m \geq 0,$$

$$Q(t) := \text{diag } H_m(t, \zeta^\mu), \quad \mu = 0(1)N - 1,$$

lautet die Lösung von (2)

$$q(t) = W^* Q(t) Q^{-1} (1 - \lambda) W y. \quad (3)$$

Hieraus entnimmt man, daß die Frage der Existenz von $q(t)$ ursächlich mit der Lage der Nullstellen der Euler-Frobenius-Polynome $H_m(1 - \lambda, \zeta^\mu)$, $\mu = 0(1)N - 1$, verknüpft ist. Aussagen über die Lage dieser Nullstellen

findet man bei der Morsche [3, Theorem 3.1]. Setzt man voraus, daß N ungerade ist, so ist der Vektor $q(t)$ in (3) stets wohldefiniert. Im folgenden beschränken wir uns daher (ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit) auf diesen Fall.

3.

Aus (3) folgt für den Spline $\tilde{q}(t)$, der den Vektor

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

interpoliert

$$\tilde{q}(t) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{H_m(t, \zeta^\mu)}{H_m(1-\lambda, \zeta^\mu)} \zeta^{(N-1)\mu} \\ \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{H_m(t, \zeta^\mu)}{H_m(1-\lambda, \zeta^\mu)} \zeta^{(N-2)\mu} \\ \vdots \\ \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{H_m(t, \zeta^\mu)}{H_m(1-\lambda, \zeta^\mu)} \zeta^\mu \\ \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{H_m(t, \zeta^\mu)}{H_m(1-\lambda, \zeta^\mu)} \end{pmatrix}$$

Elementare Überlegungen (für den Fall $\lambda = 0$ vgl. man Richards [4, S. 306/307]) zeigen, daß die Komponenten $q_\nu(t)$ von $\tilde{q}(t)$ im Intervall $(0, 1 - \lambda)$ bzw. im Intervall $(1 - \lambda, 1)$ jeweils einheitliches Vorzeichen besitzen, und zwar gilt für N ungerade

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} q_\nu(t) &= (-1)^{\nu+1} && \text{für } 0 < t < 1 - \lambda, \\ \operatorname{sgn} q_\nu(t) &= (-1)^\nu && \text{für } 1 - \lambda < t < 1, \end{aligned} \quad \nu = 1(1)N - 1,$$

$$\operatorname{sgn} q_N(t) = +1 \quad \text{für } 0 < t < 1.$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_1 &= \frac{1}{N} \left[\sum_{\mu=0}^{N-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} (-1)^\nu \zeta^{\mu\nu} \frac{\int_0^{1-\lambda} H_m(t, \zeta^\mu) dt}{H_m(1-\lambda, \zeta^\mu)} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\mu=0}^{N-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} (-1)^\nu \zeta^{\mu\nu} \frac{\int_{1-\lambda}^1 H_m(t, \zeta^\mu) dt}{H_m(1-\lambda, \zeta^\mu)} + \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{\int_0^1 H_m(t, \zeta^\mu) dt}{H_m(1-\lambda, \zeta^\mu)} \right] \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{1}{H_m(1-\lambda, \zeta^\mu)} \left[\frac{1-\zeta^\mu}{1+\zeta^\mu} \int_0^{1-\lambda} H_m(t, \zeta^\mu) dt \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1-\zeta^\mu}{1+\zeta^\mu} \int_{1-\lambda}^1 H_m(t, \zeta^\mu) dt + \int_0^1 H_m(t, \zeta^\mu) dt \right]. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{m+1}(t, \zeta^\mu) = (m+1)(1-\zeta^\mu) H_m(t, \zeta^\mu)$$

folgt durch Integration

$$\int_0^1 H_m(t, \zeta^\mu) dt = \frac{H_{m+1}(1, \zeta^\mu)}{m+1}$$

sowie für $\mu \neq 0$

$$\int_0^{1-\lambda} H_m(t, \zeta^\mu) dt = \frac{1}{(m+1)(1-\zeta^\mu)} [H_{m+1}(1-\lambda, \zeta^\mu) - \zeta^\mu H_{m+1}(1, \zeta^\mu)]$$

und

$$\int_{1-\lambda}^1 H_m(t, \zeta^\mu) dt = \frac{1}{(m+1)(1-\zeta^\mu)} [H_{m+1}(1, \zeta^\mu) - H_{m+1}(1-\lambda, \zeta^\mu)].$$

Beachtet man jetzt noch $H_m(t, 1) = m!$, so erhält man aus (4) schließlich

$$\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_1 = \frac{2}{(m+1)N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{H_{m+1}(1-\lambda, \zeta^\mu)}{(1+\zeta^\mu)H_m(1-\lambda, \zeta^\mu)}. \quad (5)$$

Aus Symmetriegründen ist offenbar $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_1 = \|\mathcal{L}_{N,1-\lambda}^m\|_1$. Es genügt also, das Verhalten von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_1$ für $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ zu untersuchen.

Wir bringen nun (5) in Verbindung mit dem komplexen Integral

$$J_{N,\lambda}^m := \frac{1}{(m+1)\pi i} \oint_{C_1-C_2} \frac{z^{N-1} H_{m+1}(1-\lambda, z) dz}{(z+1)(z^N-1) H_m(1-\lambda, z)}. \quad (6)$$

Hierbei bezeichnen C_1 und C_2 die Kreise vom Radius ρ^{-1} und ρ um $z = 0$ und die reelle Zahl ρ mit $0 < \rho < 1$ ist so gewählt, daß

(i) alle im Innern des Einheitskreises gelegenen Nullstellen von $H_m(1 - \lambda, z)$ und $H_m(\lambda, z)$ im Innern von C_2 liegen,

(ii) alle außerhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstellen von $H_m(1 - \lambda, z)$ und $H_m(\lambda, z)$ auch außerhalb von C_1 liegen.

Nach ter Morsche [3, Theorem 3.1], sind für $0 \leq \lambda < 1$ alle Nullstellen von $H_m(1 - \lambda, z)$ negativ reell; die Nullstelle $z = -1$ tritt nur auf für $\lambda = 0$ und m gerade bzw. $\lambda = \frac{1}{2}$ und m ungerade und besitzt in beiden Fällen die Vielfachheit 1. Somit ergibt der Residuensatz für $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

$$\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_1 = J_{N,\lambda}^m + \frac{H_{m+1}(1 - \lambda, -1)}{(m + 1) H_m(1 - \lambda, -1)}. \tag{7}$$

Insbesondere ist

$$\|\mathcal{L}_{N,0}^{2k-1}\|_1 = J_{N,0}^{2k-1}, \quad \|\mathcal{L}_{N,1/2}^{2k}\|_1 = J_{N,1/2}^{2k} \tag{8}$$

und mit

$$\tilde{H}_{2k}(1, z) := \frac{H_{2k}(1, z)}{z + 1}, \quad \tilde{H}_{2k-1}\left(\frac{1}{2}, z\right) := \frac{H_{2k-1}\left(\frac{1}{2}, z\right)}{z + 1}$$

wird

$$\|\mathcal{L}_{N,0}^{2k}\|_1 = J_{N,0}^{2k} - \frac{2}{2k + 1} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \frac{z^{N-1} H_{2k+1}(1, z)}{(z^N - 1) \tilde{H}_{2k}(1, z)} \tag{9}$$

bzw.

$$\|\mathcal{L}_{N,1/2}^{2k-1}\|_1 = J_{N,1/2}^{2k-1} - \frac{1}{k} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \frac{z^{N-1} H_{2k}(1, z)}{(z^N - 1) \tilde{H}_{2k}(1, z)}. \tag{10}$$

Der entscheidende Vorteil der Integraldarstellung (6) von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_1$ gegenüber (5) ergibt sich jetzt folgendermaßen: das in (6) auftretende Integral über den Weg C_1 kann vermöge der Substitution $z \rightarrow z^{-1}$ in ein Integral über den Weg C_2 umgeformt werden. Für $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ ergibt sich so

$$\oint_{C_1} \frac{z^{N-1} H_{m+1}(1 - \lambda, z) dz}{(z + 1)(z^N - 1) H_m(1 - \lambda, z)} = \oint_{C_2} \frac{H_{m+1}(\lambda, z) dz}{z(1 + z)(1 - z^N) H_m(\lambda, z)}. \tag{11}$$

Vermöge (6), (7) und (11) ist somit die Summation über die N -ten Einheitswurzeln in (5) ersetzt durch die Berechnung der Residuen an den im Innern von C_2 liegenden Singularitäten der Integranden in (6) bzw. (11). Die praktischen Vorzüge dieses Vorgehens verdeutlichen wir im nächsten Abschnitt anhand des Beispiels quadratischer Splines.

4.

Wegen

$$H_2(t, z) = (1 - t)^2 z^2 + (1 + 2t - 2t^2)z + t^2,$$

$$H_3(t, z) = (1 - t)^3 z^3 + (4 - 6t^2 + 3t^3)z^2 + (1 + 3t + 3t^2 - 3t^3)z + t^3$$

folgt aus (6) und (9) für $\lambda = 0$, $m = 2$ und $k = 1$ zunächst

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{N,0}^2\|_1 &= \frac{1}{3\pi i} \oint_{C_1-C_2} \frac{z^{N-1}(z^2 + 4z + 1) dz}{(z+1)^2(z^N-1)} = \frac{2}{3} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \frac{z^{N-1}(z^2 + 4z + 1)}{z^N - 1} \\ &= \frac{1}{3\pi i} \oint_{C_2} \frac{1 + z^N}{1 - z^N} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z+1)^2} dz + \frac{N}{3} = \frac{1}{3}(N+2). \end{aligned} \quad (12)$$

Analog entnimmt man aus (7) und (8) für $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$

$$\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_1 = \frac{1}{3\pi i} \oint_{C_1-C_2} \frac{z^{N-1}H_3(1-\lambda, z) dz}{(z+1)(z^N-1)H_2(1-\lambda, z)} + \frac{1}{3} \frac{H_3(1-\lambda, -1)}{H_2(1-\lambda, -1)},$$

was mit (11) auf

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_1 &= \frac{1}{3\pi i} \oint_{C_2} \frac{H_3(\lambda, z) dz}{z(1+z)(1-z^N)H_2(\lambda, z)} \\ &\quad + \frac{1}{3\pi i} \oint_{C_1} \frac{z^{N-1}H_3(1-\lambda, z) dz}{(1+z)(1-z^N)H_2(1-\lambda, z)} \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{(1-2\lambda)(1+2\lambda-2\lambda^2)}{\lambda(1-\lambda)} \end{aligned}$$

führt. Nun gilt

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{H_3(\lambda, z)}{z(1+z)(1-z^N)H_2(\lambda, z)} = \lambda$$

und mit

$$z_1 := \frac{(2\lambda^2 - 2\lambda - 1) + \sqrt{1 + 4\lambda - 4\lambda^2}}{2(1-\lambda)^2}, \quad z_2 := \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^2} z_1$$

erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_1} \frac{H_3(\lambda, z)}{z(1+z)(1-z^N)H_2(\lambda, z)} &= \frac{(2\lambda-1) + \sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}}{4\lambda(1-\lambda)} \frac{1}{1-z_1^N}, \\ \operatorname{res}_{z=z_2} \frac{z^{N-1}H_3(1-\lambda, z)}{(1+z)(1-z^N)H_2(1-\lambda, z)} &= \frac{(1-2\lambda) + \sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}}{4\lambda(1-\lambda)} \frac{z_2^N}{1-z_2^N}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_1 &= \frac{1-2\lambda^2}{6\lambda(1-\lambda)} + \frac{1}{6} \frac{(2\lambda-1) + \sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}}{4\lambda(1-\lambda)} \frac{1}{1-z_1^N} \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{(1-2\lambda) + \sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}}{4\lambda(1-\lambda)} \frac{z_2^N}{1-z_2^N} \end{aligned}$$

und—mit der Substitution $\lambda \rightarrow 1-\lambda$ —

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{N,1-\lambda}^2\|_1 &= \frac{-1+4\lambda-2\lambda^2}{6\lambda(1-\lambda)} + \frac{1}{6} \frac{(1-2\lambda) + \sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}}{4\lambda(1-\lambda)} \frac{1}{1-z_2^N} \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{(2\lambda-1) + \sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}}{4\lambda(1-\lambda)} \frac{z_1^N}{1-z_1^N}, \end{aligned}$$

also wegen $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_1 = \|\mathcal{L}_{N,1-\lambda}^2\|_1$ schließlich

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \frac{(2\lambda-1) + \sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}}{\lambda(1-\lambda)} \frac{1+z_1^N}{1-z_1^N} \\ &\quad + \frac{1}{12} \frac{(1-2\lambda) + \sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}}{\lambda(1-\lambda)} \frac{1+z_2^N}{1-z_2^N}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (12) ergibt sich hieraus für jedes feste $\lambda \in [0, 1)$ die Monotonieaussage

$$\|\mathcal{L}_{1,\lambda}^2\|_1 < \|\mathcal{L}_{3,\lambda}^2\|_1 < \|\mathcal{L}_{5,\lambda}^2\|_1 < \dots < \|\mathcal{L}_\lambda^2\|_1$$

mit der oberen Schranke

$$\|\mathcal{L}_\lambda^2\|_1 := \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{\sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}}{\lambda(1-\lambda)}. \tag{13}$$

Speziell für $\lambda = \frac{1}{2}$ wird

$$\|\mathcal{L}_{N,1/2}^2\|_1 = \frac{1}{3} \left[1 + 2\sqrt{2} \frac{1-(3-2\sqrt{2})^N}{1+(3-2\sqrt{2})^N} \right]. \tag{14}$$

Aus (14) berechnet man die Tabelle

N	$\ \mathcal{L}_{N,1/2}^2\ _1$
1	1.000000000
3	1.266666667
5	1.275862069
7	1.276134122
9	1.276142132
11	1.276142368
13	1.276142375
\vdots	
∞	1.276142375

Abbildung 1 zeigt den Verlauf von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_1$ für $N = 3, 5, 7, 9$ zusammen mit der oberen Schranke nach (13).

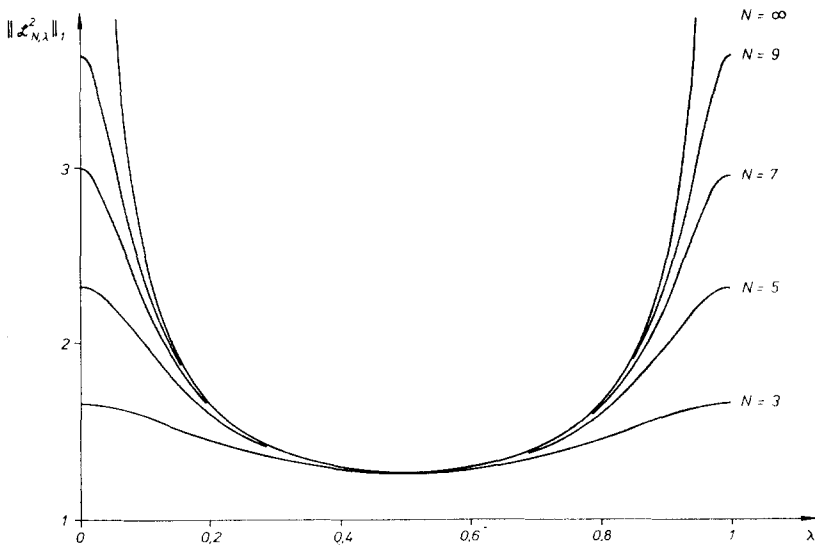


ABBILDUNG 1

LITERATUR

1. G. MEINARDUS UND G. MERZ, Zur periodischen Spline-Interpolation, in "Spline-Funktionen. Vorträge und Aufsätze" (K. Böhmer, G. Meinardus, W. Schempp, Eds.), S. 177–195, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1974.
2. G. MEINARDUS UND G. MERZ, Zur periodischen Spline-Interpolation, II, in "Numerische Methoden der Approximationstheorie" (L. Collatz, G. Meinardus, H. Werner, Eds.), Band 4 (ISNM 42), S. 204–221, Birkhäuser, Basel/Stuttgart, 1978.

3. H. TER MORSCHÉ, On the existence and convergence of interpolating periodic spline functions of arbitrary degree, in "Spline-Funktionen. Vorträge und Aufsätze" (K. Böhmer, G. Meinardus, W. Schempp, Eds.), S. 197–214, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1974.
4. F. B. RICHARDS, Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator, *J. Approximation Theory* 7 (1973), 302–317.